**IMPORTANTE!**

A descrição de resultados de testes e provas, através de distribuição de freqüência e seus gráficos, geralmente não são suficientes, para tal existem na Estatística, medidas descritivas que resumem as informações necessárias para o estudo de distribuição. Tais medidas são de mais fácil manejo e compreensão do que os dados originais.

Para uma descrição, do conjunto, bem informativa, são necessárias quatro medidas diferentes:

1 - uma medida de Tendência Central, que informa o nível geral médio do grupo;

2 - uma medida de Variabilidade ou Dispersão, que indica o grau de dispersão dos dados em torno do valor central;

3 - uma medida de Assimetria, que dá uma visão de inclinação da distribuição dos valores para a direita ou esquerda;

4 - uma medida de Curtose, que mostra o achatamento da curva, obtido com a distribuição de freqüência.

Para a análise final numérica de um levantamento estatístico, devemos sempre destacar essas quatro medidas, pois, descrevem a distribuição toda.

**9- Medidas** (ou Elementos Representativos da Série ou Medidas de Posição)

**9.1. Medidas para dados NÃO AGRUPADOS em Distribuição de Freqüência**

**9.1.1. Medidas de Tendência Central**

**Introdução**

As Medidas de Tendência Central são números que indicam o valor resumo de uma série de dados; tendem a localizar-se em torno de um valor central dentro de um conjunto de dados.

**Principais Medidas de Tendência Central**

1) Média (M ou ) → medida de uniformização;

2) Mediana (Me) → medida de posição (meio);

3) Moda (Mo) → medida de concentração.

**1) MÉDIA ARITMÉTICA (M ou** **):** é o elemento representativo da série mais usado; indica o “centro de gravidade” da série, procurando “uniformizar” os dados em torno de um valor médio.

Obs: \* não esquecer a “unidade” junto ao valor da M.

\* média da população → μ

\* média da amostra → M ou 

→ **Cálculo da Média**: “quociente entre a soma de todos os valores e o no total de dados”.

**a1) sem frequência** → M = 

Exemplo:

|  |
| --- |
| X (reais) |
| 1.600,00 |
| 1.750,00 |
| 1.800,00 |
| 1.200,00 |
| 1.950,00 |

M = 1600 + 1750 + 1800 + 1200 + 1950 = 8300 = R$1.660,00

5 5

**a2) com freqüência** → M = 

Exemplo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X (Notas) | f | X . f |
| 4 | 4 | 4 . 4 = 16 |
| 5 | 8 | 5 . 8 = 40 |
| 7 | 6 | 7 . 6 = 42 |
| 8 | 3 | 8 . 3 = 24 |
| 9 | 1 | 9 . 1 = 9 |
| Σ | 22 | 131 |

M = 4.4 + 5.8 + 7.6 + 8.3 + 9.1 = 131 = 5,95 nota

22 22

**2) MEDIANA (Me):** é o elemento de tendência central. Divide a série em 2 partes iguais, 50% abaixo e 50% acima dela.

*Obs.: para o cálculo da mediana é necessário que os dados estejam em ordem crescente ou decrescente.*

Obs.: Não esquecer a “unidade” junto ao valor da Me.

→ **Cálculo da Mediana**

Me = Xn/2 + ½

*Obs.: o valor obtido através da fórmula não é o valor mediano, mas a posição do valor mediano.*

Exemplos:

**a) No ímpar de dados** → (3, 6, 5, 7, 3, 2, 8) anos

Ordem Crescente dos dados → (2, 3, 3, 5, 6, 7, 8) anos

Me = X7/2 + ½ = X8/2

Me = X4 → a mediana é o valor que está na 4a posição dos dados, ou seja, (2, 3, 3, **5**, 6, 7, 8)

Me = 5 anos

**b) No par de dados** → (3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9) t

Me = X8/2 + ½  = X9/2

Me = X4,5 → a mediana é o valor que está entre a 4a e a 5a posição dos dados, ou seja,

(3, 4, 4, **5, 6**, 7, 8, 9)

Me = 5 + 6 = 5,5 t

2

**3) MODA (Mo):** é o elemento representativo da série que indica a concentração. É o valor que ocorre com maior freqüência, é o que mais aparece na série.

Obs.: não esquecer a “unidade” junto ao valor da Mo.

→ **Cálculo da Moda**

Mo = valor de maior freqüência num conjunto de dados.

Exemplos:

a) (2, 4, 5, 5, 6, 7) → Mo = 5

b) (5, 6, 7, 8, 9) → Mo = amodal

c) (3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9) → Mo = 4 e 5

**9.1.2. Medidas** **Separatrizes**

As Separatrizes são medidas de posição que dividem a série em partes iguais.

As principais separatrizes são:

**1. Quartis**

Dividem a série em 4 partes iguais. Temos assim, 3 quartis, ou seja, Q­­1, Q2 e Q3

Q1: 1o quartil → Q1 = Xn/4 + 1/2 → posição em que se encontra o 1o Quartil

Q2: 2o quartil ou Me → Q2 = X2n/4 + ½ → posição em que se encontra o 2o Quartil

Q3: 3o quartil → Q3 = X3n/4 + ½ → posição em que se encontra o 3o Quartil

**2. Decis**

Dividem a série em 10 partes iguais, portanto temos 9 decis, ou seja, D1, D2, D3, ..., D9.

D1: 1o Decil → D1 = Xn/10 + ½ → posição em que se encontra o 1o Decil

D2: 2o Decil → D2 = X2n/10 + ½ → posição em que se encontra o 2o Decil

D3: 3o Decil → D3 = X3n/10 + ½ → posição em que se encontra o 3o Decil

D9: 9o Decil → D9 = X9n/10 + ½ → posição em que se encontra o 9o Decil

D9, por exemplo, é o ponto na escala, abaixo do qual estão 9/10 dos casos.

**3. Percentis ou Centis**

Dividem a série em 100 partes iguais, portanto temos 99 centis, ou seja, C1, C2, C3, C4, ..., C78, C79, C80, ..., C99.

C1: 1o Centil → C1 = Xn/100 + ½ → posição em que se encontra o 1o Centil

C2: 2o Centil → C2 = X2n/100 + ½ → posição em que se encontra o 2o Centil

C3: 3o Centil → C3 = X3n/100 + ½ → posição em que se encontra o 3o Centil

C99: 99o Centil → C99 = X99n/100 + ½ → posição em que se encontra o 99o Centil

**9.1.3. Medidas de Dispersão**

Representamos geralmente uma série pela M, Me ou Mo, entretanto, elas não descrevem a flutuação dos demais valores em torno delas. Por isso, usamos medidas de dispersão, de variabilidade, que indicam o grau de variabilidade, de flutuação dos valores em torno do valor pré-determinado.

As principais medidas de dispersão quanto a MÉDIA são:

a) AMPLITUDE TOTAL ou campo de variação:

A = X> - X<

Esta medida é muito instável; se ocorrer valor excepcional, terá pouca utilidade.

b) VARIÂNCIA: é a média dos quadrados dos desvios. A variância de uma amostra é representada por **s2** e constitui uma estimativa da variância da população **σ2** (sigma ao quadrado).

**1. População**

 Ou 

Obs.: para valores pequenos de n (n<25) devemos tomar o denominador de s2 como n-1 em lugar de n. O divisor n-1 é denominado graus de liberdade.

**1.1. Amostra**

 Ou 

c) DESVIO PADRÃO ou afastamento médio quadrático: consiste em achar a média quadrática entre os desvios em relação à Média. É a medida mais usada, quer no trabalho experimental ou de pesquisa. Representado por s (quando estamos trabalhando com uma amostra) e σ (quando estivermos trabalhando com a população).

**1. População**

 Ou 

**1.1. Amostra**

 Ou 

d) COEFICIENTE DE VARIAÇÃO: é o índice de variabilidade - é o desvio padrão expresso como percentagem da Média. Usado para comparar grandezas de unidades iguais ou diferentes.

CV = 100∙ σ Quando trabalhamos com a população

μ

CV = 100∙s quando trabalhamos com a amostra



Interpretação do Coeficiente de Variação:

a) até 15% - variação pequena

b) 15,1% a 30% - variação média

c) Acima de 30% - variação grande

**9.2. Medidas para dados AGRUPADOS em Distribuição de Freqüência**

**9.2.1. Medidas de Tendência Central**

**1) MÉDIA ARITMÉTICA (M ou** **):** é o elemento representativo da série mais usado; indica o “centro de gravidade” da série, procurando “uniformizar” os dados em torno de um valor médio.

M = 

Exemplo:

# Tempo (anos) de dedicação dos funcionários à Empresa Y. 2016

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X (Anos) | f | Xi | Xi ∙ f |
| 10 12 | 85 | 11 | 11∙85=935 |
| 12 14 | 165 | 13 | 13∙165=2145 |
| 14 16 | 35 | 15 | 15∙35=525 |
| 16 18 | 15 | 17 | 17∙15=255 |
| 18 20 | 10 | 19 | 19∙10=190 |
|  | 310 |  | 4050 |

Fonte: Dados Fictícios

M = 11.85 +13.165 + 15.35 + 17.15 + 19.10 = 4050 = 13,06 anos

310 310

**2) MEDIANA (Me):** é o elemento de tendência central. Divide a série em 2 partes iguais, 50% abaixo e 50% acima dela.

Em dados agrupados em classes, para determinar à mediana, precisamos seguir algumas etapas, ou seja:

1) determinar a classe que contém o valor mediano;

2) a classe que contém o valor mediano é a 1a classe cuja freqüência absoluta acumulada “abaixo de” é igual ou excede a metade do no total de observações;

3) uma vez determinada a classe, a mediana é dada pela fórmula:

Me = X1 +  onde,

X1: limite inferior da classe mediana;

Σf: freqüência absoluta total da distribuição;

fA ↓ : freqüência absoluta acumulada “abaixo de” da classe anterior à classe mediana;

f: freqüência absoluta da classe mediana;

Ai = amplitude do intervalo da classe mediana.

Exemplo:

# Tempo (anos) de dedicação dos funcionários à Empresa Y. 2016

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Classes | X (Anos) | f | fA↓ |
| 1 | 10 12 | 85 | 85 |
| 2 | 12 14 | 165 | 250 |
| 3 | 14 16 | 35 | 285 |
| 4 | 16 18 | 15 | 300 |
| 5 | 18 20 | 10 | 310 |
| Σ | - | 310 | - |

1) Determinar a classe que contém o valor mediano, ou seja, determinar a classe cuja freqüência absoluta acumulada “abaixo de” é igual ou excede a metade do no total de observações.

No total de observações = 310 → metade = 310/2 = 155

Classe que contém o valor mediano = 12 14

Me = X1 + 

X1 = 12

Σ f = 310

fA↓ = 85

f = 165

A2 = 2 logo,

Me = 12 +  = 12 + 0,42 . 2 = 12,84 anos

**3) MODA (Mo):** é o elemento representativo da série que indica a concentração. É o valor que ocorre com maior freqüência, é o que mais aparece na série.

Para o cálculo da Moda em dados agrupados, precisamos primeiramente determinar a classe modal, ou seja, a classe de maior freqüência, para então aplicarmos a fórmula:

Mo = X1 +  onde,

X1: limite inferior da classe modal;

d1: diferença entre a freqüência absoluta da classe modal e a frequência absoluta da classe anterior;

d2: diferença entre a freqüência absoluta da classe modal e a frequência absoluta da classe posterior;

Ai: amplitude da classe modal.

Exemplo:

# Tempo (anos) de dedicação dos funcionários à Empresa Y. 2016

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Classes | X (Anos) | f | fA↓ |
| 1 | 10 12 | 85 | 85 |
| 2 | 12 14 | 165 | 250 |
| 3 | 14 16 | 35 | 285 |
| 4 | 16 18 | 15 | 300 |
| 5 | 18 20 | 10 | 310 |
| Σ | - | 310 | - |

1) Determinar a classe modal, ou seja, a classe que contém a maior freqüência absoluta → 12 14. Assim, aplicamos a fórmula:

Mo = X1 + 

X1 = 12

d1 = 165-85 = 80

d2 = 165-35 = 130

A2 = 2

Mo = 12 +  = 12 + 0,76 = 12,76 anos

**9.2.2. Medidas** **Separatrizes**

As Separatrizes são medidas de posição que dividem a série em partes iguais.

As principais separatrizes são:

**1. Quartis**

Dividem a série em 4 partes iguais. Temos assim, 3 quartis, ou seja, Q­­1, Q2 e Q3

Q1: 1o quartil → Q1 = X1 + 

Q1 = Xn/4 + 1/2 → classe em que se encontra o 1o Quartil

Q1, por exemplo, é o ponto no qual estão ¼ dos casos.

Q2: 2o quartil ou Me → Q2 = X1 + 

Q2 = X2n/4 + ½ → classe em que se encontra o 2o Quartil

Q3: 3o quartil → Q3 = X1 + 

Q3 = X3n/4 + ½ → posição em que se encontra o 3o Quartil

**2. Decis**

Dividem a série em 10 partes iguais, portanto temos 9 decis, ou seja, D1, D2, D3, ..., D9.

D1: 1o Decil → D1 = X1 + 

D1 = Xn/10 + ½ → classe em que se encontra o 1o Decil

D9: 9o Decil → D9 = X1 + 

D9 = X9n/10 + ½ → classe em que se encontra o 9o Decil

**3. Percentis ou Centis**

Dividem a série em 100 partes iguais, portanto temos 99 centis, ou seja, C1, C2, C3, C4, ..., C78, C79, C80, ..., C99.

C1: 1o Centil → C1 = X1 + 

C1 = Xn/100 + ½ → classe em que se encontra o 1o Centil

C99: 99o Centil → C99 = X1 +  ­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­

C99 = X99n/100 + ½ → classe em que se encontra o 99o Centil

**9.2.3. Medidas de Dispersão**

Representamos geralmente uma série pela M, Me ou Mo, entretanto, elas não descrevem a flutuação dos demais valores em torno delas. Por isso, usamos medidas de dispersão, de variabilidade, que indicam o grau de variabilidade, de flutuação dos valores em torno do valor pré-determinado.

As principais medidas de dispersão quanto a MÉDIA são:

a) AMPLITUDE TOTAL ou campo de variação:

A = X> - X<

Esta medida é muito instável; se ocorrer valor excepcional, terá pouca utilidade.

b) VARIÂNCIA: é a média dos quadrados dos desvios. A variância de uma amostra é representada por **s2** e constitui uma estimativa da variância da população **σ2** (sigma ao quadrado).

**1. População**



**2. Amostra**



c) DESVIO PADRÃO ou afastamento médio quadrático: consiste em achar a média quadrática entre os desvios em relação à Média. É a medida mais usada, quer no trabalho experimental ou de pesquisa. Representado por s (quando estamos trabalhando com uma amostra) e σ (quando estivermos trabalhando com a população).

**1. População**



**2. Amostra**



d) COEFICIENTE DE VARIAÇÃO: é o índice de variabilidade - é o desvio padrão expresso como percentagem da Média. Usado para comparar grandezas de unidades iguais ou diferentes.

CV = 100∙σ quando trabalhamos com a população

μ

CV = 100∙s quando trabalhamos com a amostra



Interpretação do Coeficiente de Variação:

a) até 15% - variação pequena

b) 15,1% a 30% - variação média

c) acima de 30% - variação grande

**Exercícios!**

1) A seguinte tabela, contém o tempo de serviço (em anos) de 121 sujeitos do sexo masculino, na empresa “X”. **Determinar para dados agrupados**:

a) Medidas de Tendência Central (Média, Mediana e Moda);

b) Medidas Separatrizes (Quantil 3, Decil 2, Centil 99);

c) Medidas de Dispersão (Amplitude Total, Desvio-Padrão, Intervalo de Concentração, Coeficiente de Variação)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4,7 | 8,4 | 9,6 | 10,7 | 11,4 | 12,6 | 13,9 | 15,3 | 16,8 | 18,7 | 22 |
| 4,9 | 8,6 | 9,6 | 10,7 | 11,4 | 12,7 | 13,9 | 15,5 | 16,8 | 18,8 | 22,4 |
| 5,9 | 8,6 | 9,6 | 10,7 | 11,5 | 12,9 | 14,3 | 15,7 | 17,3 | 18,9 | 22,7 |
| 6,9 | 9 | 9,8 | 10,8 | 11,5 | 13,2 | 14,3 | 15,7 | 17,4 | 19,1 | 23,1 |
| 7,6 | 9,1 | 9,9 | 10,9 | 11,7 | 13,2 | 14,6 | 15,8 | 17,6 | 19,8 | 23,3 |
| 7,7 | 9,1 | 9,9 | 11,1 | 11,8 | 13,2 | 14,6 | 16 | 17,7 | 20 | 23,7 |
| 7,9 | 9,3 | 10,1 | 11,1 | 11,9 | 13,3 | 14,8 | 16 | 17,8 | 20,1 | 25,3 |
| 7,9 | 9,4 | 10,2 | 11,3 | 12,1 | 13,5 | 14,8 | 16,2 | 18,2 | 20,4 | 25,5 |
| 7,9 | 9,5 | 10,4 | 11,3 | 12,4 | 13,6 | 14,9 | 16,2 | 18,4 | 20,5 | 25,7 |
| 8,1 | 9,5 | 10,4 | 11,4 | 12,5 | 13,6 | 15,1 | 16,3 | 18,4 | 20,6 | 27,3 |
| 8,3 | 9,6 | 10,7 | 11,4 | 12,6 | 13,6 | 15,1 | 16,6 | 18,5 | 21,3 | 30,1 |

2) Com os dados abaixo, calcule o valor de Q1(25%), Q3(75%), C10(10%) e C90(90%).

Abertura de Conta Corrente em determinado Banco. Cidade “X”. Período “Y”.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ordem | X (Contas) | f(dias) |
| 1 | 10 12 | 85 |
| 2 | 12 14 | 165 |
| 3 | 14 16 | 35 |
| 4 | 16 18 | 15 |
| 5 | 18 20 | 10 |
| Σ | - | 310 |

Fonte: Dados Fictícios

3) Calcular Média, Moda e Mediana para os dados abaixo.

Relação de tempos em segundos gastos por máquinas para determinar uma dada tarefa. Indústria A. 2016

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Tempo (seg.) | f | Xi |
| 40 45 | 3 | 42,5 |
| 45 50 | 8 | 47,5 |
| 50 55 | 16 | 52,5 |
| 55 60 | 12 | 57,5 |
| 60 65 | 7 | 62,5 |
| 65 70 | 3 | 67,5 |
| 70 75 | 1 | 72,5 |
| Σ | 50 |  |

Fonte: Indústria A

4)Com os dados abaixo, calcule todas as medidas de dispersão:

Abertura de Conta Corrente em determinado Banco. Cidade “X”. Período “Y”.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ordem | X (Contas) | f(dias) |
| 1 | 10 12 | 85 |
| 2 | 12 14 | 165 |
| 3 | 14 16 | 35 |
| 4 | 16 18 | 15 |
| 5 | 18 20 | 10 |
| Σ | - | 310 |

Fonte: Dados Fictícios

5) Considerem o tempo de serviço de 34 funcionários em determinada empresa:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3,8 | 5,0 | 5,6 | 7,0 | 9,5 | 10,0 | 10,0 |
| 4,0 | 5,0 | 5,8 | 7,0 | 9,8 | 10,0 | 10,0 |
| 4,0 | 5,0 | 5,9 | 7,5 | 9,9 | 10,0 | 10,0 |
| 4,5 | 5,0 | 6,5 | 7,8 | 9,9 | 10,0 | 10,0 |
| 4,8 | 5,3 | 7,0 | 9,2 | 9,9 | 10,0 |  |

5.1) O Setor pessoal buscando fazer uma análise do tempo de serviço dos seus funcionários, resolveu trabalhar com três medidas de tendência central. Quais foram os resultados calculados para a média, moda, mediana e desvio padrão?

5.2) Que tipo de análise pode ser feita sobre esses valores, ou seja, o que cada um representa?

5.3) No caso até agora trabalhado, existe uma medida de tendência central, que reflete com maior exatidão o tempo de serviço dos funcionários? Por quê?

6) Calcule as Medidas de Tendência Central, Separatrizes (Q1, D9) e de Dispersão para dados não agrupados:

Distribuição da Idade de 45 Turistas, no Hotel “X”, Cidade “Y”

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 89 | 61 | 52 | 44 | 34 |
| 83 | 61 | 51 | 44 | 31 |
| 77 | 60 | 51 | 42 | 30 |
| 74 | 58 | 51 | 41 | 28 |
| 68 | 57 | 51 | 40 | 27 |
| 67 | 55 | 50 | 40 | 24 |
| 65 | 55 | 50 | 37 | 23 |
| 65 | 53 | 49 | 36 | 20 |
| 65 | 53 | 47 | 35 | 17 |

7) Construa a Tabela de Distribuição de Frequência para os dados abaixo

Gastos em alimentos e bebidas de 150 turistas (em dólares)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 102 | 83 | 80 | 74 | 64 | 52 | 42 | 32 | 24 | 14 |
| 100 | 83 | 79 | 73 | 62 | 50 | 41 | 31 | 23 | 14 |
| 99 | 83 | 79 | 73 | 62 | 49 | 41 | 30 | 23 | 14 |
| 99 | 83 | 79 | 73 | 60 | 49 | 40 | 30 | 23 | 14 |
| 97 | 83 | 78 | 72 | 58 | 47 | 40 | 29 | 22 | 14 |
| 96 | 83 | 78 | 72 | 58 | 46 | 40 | 29 | 21 | 13 |
| 96 | 82 | 78 | 71 | 57 | 45 | 39 | 29 | 21 | 13 |
| 95 | 82 | 78 | 69 | 56 | 45 | 38 | 28 | 20 | 13 |
| 95 | 82 | 78 | 68 | 56 | 45 | 37 | 27 | 20 | 13 |
| 94 | 81 | 77 | 68 | 55 | 45 | 35 | 27 | 19 | 12 |
| 93 | 81 | 77 | 67 | 54 | 45 | 35 | 26 | 19 | 11 |
| 92 | 81 | 77 | 66 | 54 | 44 | 35 | 25 | 19 | 11 |
| 92 | 80 | 76 | 66 | 54 | 44 | 33 | 25 | 17 | 11 |
| 88 | 80 | 75 | 66 | 53 | 43 | 33 | 24 | 16 | 11 |
| 88 | 80 | 74 | 65 | 52 | 42 | 33 | 24 | 16 | 11 |